مثال:

ادرس قابلية المفاضلة للدالة $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

وذلك في النقطة $(0,0)$

الحل: أن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(1+h^2\cdot 0)}{h^2+0}}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(1+0+k^2)}{0+k^2}}{k}=0$$

بالتعويض في المساواة:

$$f(h,k)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k+\eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\frac{\ln(1+h^2.k^2)}{h^2+k^2}-0=0+0+\eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\Rightarrow \eta(h,k)=\frac{\ln(1+h^2k^2)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لنرهن أن $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\eta(h,k)=0$

حسب مبرهنة القيم الوسطى للتكامل: فإن $0\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$

مبرهنة القيم الوسطى:

$m_1\leq f(x)\leq M_2\Rightarrow$

$m_1(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M_2(b-a)$

$$0(t-0)\leq\int_0^t\frac{dt}{1+t}\leq 1(t-0)\Rightarrow 0\leq\ln(1+t)\leq t$$

ومنه

$$\eta(h,k)=\frac{\ln(1+h^2.k^2)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{h^2.k^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{h^2+k^2}$$

وبالتالي:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta(h,k) = 0$$

وبالتالي فإن الدالة $f(x,y)$ قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

مثال: اثبت أن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$

الحل: أ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \frac{h^2-0}{h^2+0} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0 \cdot \frac{0-k^2}{0+k^2} - 0}{k} = 0$$

بالتعويض في المساواة [2] الشكل (2) قابلية المفاضلة:

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, k + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$h\,\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0 = h + 0 + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\frac{h\left[(h^2-k^2)-(h^2+k^2)\right]}{h^2+k^2} = \eta(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow$$

$$\eta(h,k) = \frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \eta(h,h) = \lim_{h\to 0} \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}\,h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

فإنه لا يمكن للدالة η أن تقترب من الصفر عندما $(h,k) \to (0,0)$ بالتالي

فإن f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

ملاحظة